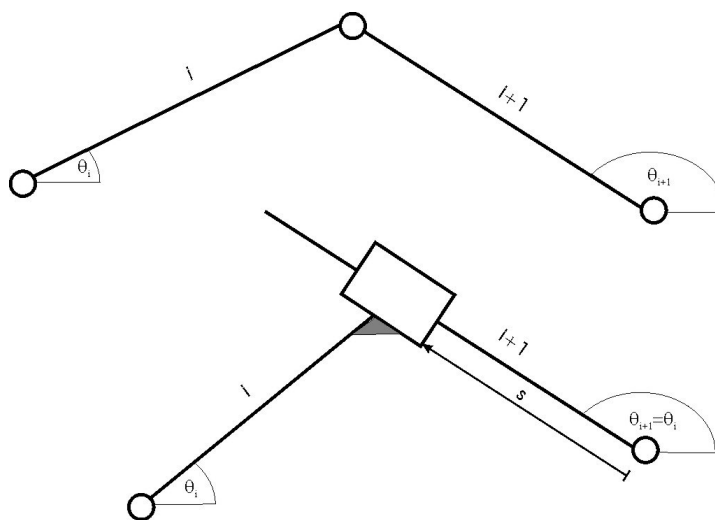


Analityczne metody kinematyki mechanizmów

Spis treści

Współrzędne opisujące położenia ogniów pary kinematycznej	1
Mechanizm korbowo-wodzikowy (crank-slider mechanism)	2
Czworobok przegubowy (four bar linkage)	3
Mechanizm jarzmowy	5
Obrót i przesunięcie mechanizmu	6

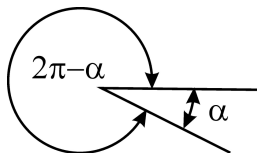
Współrzędne opisujące położenia ogniów pary kinematycznej



Rysunek 1. Para obrotowa i para przesuwna.

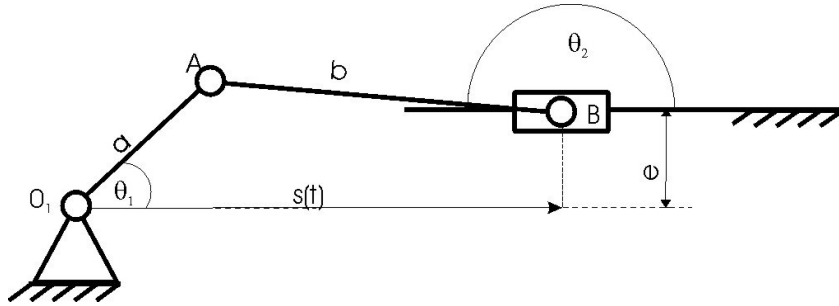
Położenie ogniwa obrotowego jest opisane kątem, położenie suwaka na jarzmie (lub w prowadnicy) w parze przesuwnej jest opisane odległością odmierzaną od charakterystycznego węzła.

W celu ujednoczenia zapisu wektorów przyjmujemy, że kąt jest dodatni, jeżeli jest odmierzany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od dodatniego kierunku osi poziomej do ogniwa. Kąt ujemny odmierzany jest zgodnie z ruchem wskazówek zegara, np. $\alpha = -90^\circ$ jest równoważny $\alpha = 270^\circ$. Kąt jest wprowadzany w tym węźle ogniwa, który jest punktem początkowym wektora opisującego to ogniwo w równaniu zamkniętej pętli.



Rysunek 2. Ilustracja kierunku odmierzania dodatniego i ujemnego kąta

Mechanizm korbowo-wodzikowy (crank-slider mechanism)



Rysunek 3. Mechanizm korbowo-wodzikowy.

Analiza geometryczna mechanizmu korbowo-wodzikowego.

Dane są wymiary ogniw a, b, e , kąt określający położenie korby θ_1 oraz prędkość kątową ω_1 oraz przyspieszenie kątowe ε_1 korby. Dla wyznaczenia położenia suwaka wprowadzono odległość $s(t)$, a dla łącznika kąt θ_2 .

Równaniami wyjściowymi są równania wektorowe $\vec{O_1A} = \vec{O_1B} + \vec{BA}$.

$$[a \cos \theta_1, a \sin \theta_1] = [s(t), e] + [b \cos \theta_2, b \sin \theta_2].$$

Które zapiszemy w postaci algebraicznej

$$a \cos \theta_1 - s = b \cos \theta_2, \quad a \sin \theta_1 - e = b \sin \theta_2.$$

Odpowiedni zapis zespolony miałby postać $ae^{j\theta_1} = be^{j\theta_2} + ee^{j\frac{1}{2}\pi} + se^{j0}$ i po rozdzieleniu części rzeczywistej oraz urojonej prowadziłyby do tego samego układu równań. Rozwiązaniami są

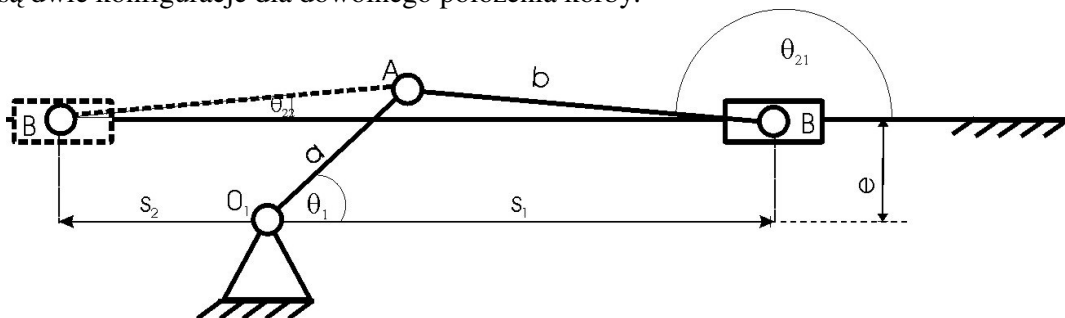
$$s_{1,2} = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L},$$

gdzie $L = 1; M = -2a \cos \theta_1; N = a^2 - 2ae \sin \theta_1 + e^2 - b^2$

oraz

$$\cos \theta_{2,1,2} = \frac{a \cos \theta_1 - s_{1,2}}{b}, \quad \sin \theta_{2,1,2} = \frac{a \sin \theta_1 - e}{b}.$$

Możliwe są dwie konfiguracje dla dowolnego położenia korby.



Rysunek 4. Dwa rozwiązania położenia ogniw biernych mechanizmu korbowo-wodzikowego.

Analiza kinematyczna

Prędkości: $\frac{d}{dt} ae^{j\theta_1} = \frac{d}{dt} (be^{j\theta_2} + ee^{j\frac{1}{2}\pi} + se^{j0})$

Po obliczeniu pochodnej równania wektorowego lub równania zapisanego za pomocą liczb zespolonych otrzymamy układ dwóch równań algebraicznych z którego wyznaczymy

prędkość kątową łącznika

$$\omega_2 = \frac{a}{b} \omega_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2},$$

prędkość suwaka

$$\frac{ds}{dt} = -a\omega_1 \sin \theta_1 + b\omega_2 \sin \theta_2.$$

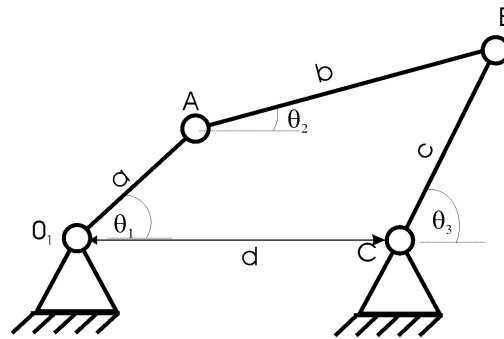
Przyspieszenia: $\frac{d^2}{dt^2} ae^{j\theta_1} = \frac{d^2}{dt^2} (be^{j\theta_2} + ee^{j\frac{1}{2}\pi} + se^{j0})$

Po obliczeniu drugiej pochodnej równania wektorowego lub równania zapisanego za pomocą liczb zespolonych otrzymamy układ dwóch równań algebraicznych z którego wyznaczymy

przyspieszenie kątowe łącznika $\varepsilon_2 = \frac{a\varepsilon_1 \cos \theta_1 - a\omega_1^2 \sin \theta_1 + b\omega_2^2 \sin \theta_2}{b \cos \theta_2},$

przyspieszenie suwaka $\frac{d^2s}{dt^2} = b\varepsilon_2 \sin \theta_2 + b\omega_2^2 \cos \theta_2 - a\varepsilon_1 \sin \theta_1 - a\omega_1^2 \cos \theta_1.$

Czworobok przegubowy (four bar linkage)



Rysunek 5. Czworobok przegubowy.

Wewnętrzny podział czworoboku przegubowy (four bar linkage):

- I klasa – suma najmniejszego i największego wymiaru jest mniejsza lub równa sumie pozostałych wymiarów
- II klasa – nie zachodzi warunek powyższy

Mechanizm I klasy

- napędzające ogniwo to ogniwo najkrótsze – mechanizm korbowo – wahaczowy,
- ogniwo nieruchome jest najkrótsze – mechanizm dwukorbowy,
- w przeciwnym wypadku mamy mechanizm dwuwahaczowy.

Mechanizm II klasy jest zawsze dwuwahaczowy

Np. $a = 48cm; b = 58cm; c = 46cm; d = 24cm$ $24 + 58 = 82 < 48 + 46 = 94$

Mechanizm I klasy, najkrótsze ogniwo nieruchome – mechanizm dwukorbowy

Analiza geometryczna mechanizmu czworoboku przegubowego.

Dane są długości ogniw a, b, c, d , kąt określający położenie korby θ_1 oraz prędkość kątowa ω_1 oraz przyspieszenie kątowe ε_1 korby. Dla wyznaczenia położenia łącznika oraz wahacza wprowadzono kąty θ_2, θ_3 .

Równaniami wyjściowymi są równania wektorowe $\vec{O_1A} + \vec{AB} = \vec{O_1C} + \vec{CB}$ (odpowiednia postać zespolona $ae^{j\theta_1} + be^{j\theta_2} + ce^{j(\pi+\theta_3)} + de^{j\pi} = 0$). Które w postaci algebraicznej przyjmuje postać $[a \cos \theta_1, a \sin \theta_1] + [b \cos \theta_2, b \sin \theta_2] = [d, 0] + [c \cos \theta_3, c \sin \theta_3]$

To daje równania algebraiczne

$$a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 = c \cos \theta_3 + d, \quad a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 = c \sin \theta_3.$$

Po przekształceniach otrzymuje się zależności

$$K_1 \cos \theta_3 - K_2 \cos \theta_1 + K_3 = \cos(\theta_1 - \theta_3), \quad K_4 \cos \theta_1 + K_1 \cos \theta_2 + K_5 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

gdzie: $K_1 = \frac{d}{a}$, $K_2 = \frac{d}{c}$, $K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$, $K_4 = \frac{d}{b}$, $K_5 = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2ab}$

oraz kąty

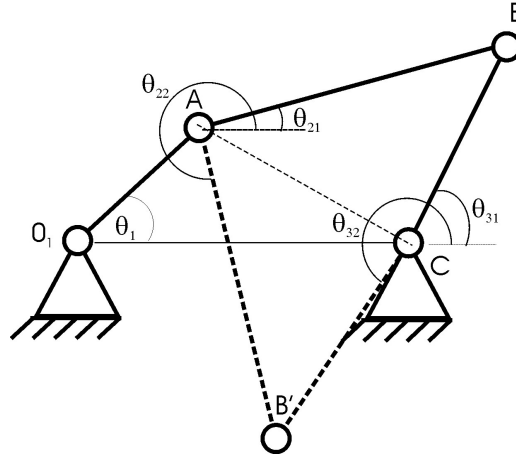
$$\theta_{3,1,2} = 2 \arctg \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \theta_{2,1,2} = 2 \arctg \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}.$$

W których oznaczono

$$A = \cos \theta_1 + K_3 - K_1 - K_2 \cos \theta_1, \quad B = -2 \sin \theta_1, \quad C = K_1 + K_3 - (1 + K_2) \cos \theta_1$$

$$D = \cos \theta_1 + K_5 - K_1 + K_4 \cos \theta_1, \quad E = -2 \sin \theta_1, \quad F = K_1 + K_5 + (K_4 - 1) \cos \theta_1$$

Możliwe są dwie konfiguracje dla dowolnego położenia korby



Rysunek 6. Dwa rozwiązania położenia ogniw biernych czworoboku przegubowego.

Powtarzając czynności jak dla mechanizmu korbowo wodzikowego oblicza się

prędkości kątowe $\frac{d}{dt}(ae^{j\theta_1} + be^{j\theta_2} + ce^{j\theta_3} + de^{j\pi}) = 0$

$$\omega_2 = \frac{a\omega_1 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{b \sin(\theta_2 - \theta_3)}, \quad \omega_3 = \frac{a\omega_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{c \sin(\theta_3 - \theta_2)},$$

oraz przyspieszenia kątowe $\frac{d^2}{dt^2}(ae^{j\theta_1} + be^{j\theta_2} + ce^{j\theta_3} + de^{j\pi}) = 0$

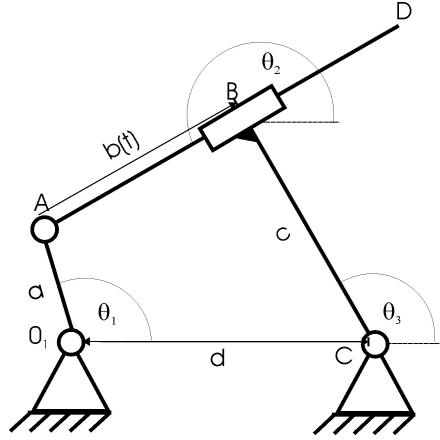
$$\varepsilon_2 = \frac{C'D' - A'F'}{A'E' - B'D'}, \quad \varepsilon_3 = \frac{C'E' - B'F'}{A'E' - B'D'},$$

w których oznaczono

$$A' = c \sin \theta_3, \quad B' = b \sin \theta_2, \quad C' = a\varepsilon_1 \sin \theta_1 + a\omega_1^2 \cos \theta_1 + b\omega_2^2 \cos \theta_2 - c\omega_3^2 \cos \theta_3,$$

$$D' = c \cos \theta_3, \quad E' = b \cos \theta_2, \quad F' = a\varepsilon_1 \cos \theta_1 - a\omega_1^2 \sin \theta_1 - b\omega_2^2 \sin \theta_2 + c\omega_3^2 \sin \theta_3.$$

Mechanizm jarzmowy



Rysunek 7. Analizowany mechanizm jarzmowy.

Analiza geometryczna mechanizmu jarzmowego.

Dane są długości ogniw a, c, d , kąt $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, kąt określający położenie korby θ_1 oraz prędkość kątowa ω_1 oraz przyspieszenie kątowe ε_1 korby. Dla wyznaczenia położenia jarzma oraz wahacza wprowadzono kąty θ_2, θ_3 . Położenie suwaka B na jarzmie określa wymiar b .

Wyjściowym równaniem wektorowym jest równanie postaci

$$[a \cos \theta_1, a \sin \theta_1] = [d, 0] + [c \cos \theta_3, c \sin \theta_3] + [b(t) \cos \theta_2, b(t) \sin \theta_2] \quad (ae^{j\theta_1} = b(t)e^{j\theta_2} + ce^{j\theta_3} + de^{j0}).$$

Między szukаныmi kątami istnieje zależność $\theta_2 = \theta_3 + \frac{\pi}{2}$.

To daje dwa równania algebraiczne

$$a \cos \theta_1 = d + c \cos \theta_3 + b(t) \cos \theta_2, \quad a \sin \theta_1 = c \sin \theta_3 + b(t) \sin \theta_2,$$

$$\text{z których wyznacza się } b = \frac{a \sin \theta_1 - c \sin \theta_3}{\sin \theta_2}, \quad \theta_{3,1,2} = 2 \arctg \frac{-B'' \pm \sqrt{B''^2 - 4A''C''}}{2A''}$$

gdzie: $A'' = d - c - a \cos \theta_1$, $B'' = 2a \sin \theta_1$, $C'' = a \cos \theta_1 - d - c$.

Postępując analogicznie jak dwóch pierwszych mechanizmów wyznacza się prędkości i przyspieszenia ogniw.

Prędkości $\frac{d}{dt} ae^{j\theta_1} = \frac{d}{dt} (b(t)e^{j\theta_2} + ce^{j\theta_3} + de^{j0}).$

Prędkość suwaka względem jarzma $\frac{db}{dt} = \frac{a\omega_1}{b} (b \cos(\theta_3 - \theta_1) + c \sin(\theta_3 - \theta_1)).$

Prędkość kątowa wahacza i jarzma $\omega_3 = \frac{a\omega_1}{b} \sin(\theta_1 - \theta_3).$

Przyspieszenia $\frac{d^2}{dt^2} ae^{j\theta_1} = \frac{d^2}{dt^2} (b(t)e^{j\theta_2} + ce^{j\theta_3} + de^{j0}).$

Przyspieszenie suwaka względem jarzma $\frac{d^2 b}{dt^2} = \frac{C^* E^* - B^* F^*}{A^* E^* - B^* D^*}.$

Przyspieszenie kątowe wahacza i jarzma $\varepsilon_3 = \frac{A^* F^* - C^* D^*}{A^* E^* - B^* D^*}.$

$$A^* = \sin \theta_3, \quad B^* = b \cos \theta_3 + c \sin \theta_3, \quad C^* = a \varepsilon_1 \sin \theta_1 + a \omega_1^2 \cos \theta_1 + b \omega_3^2 \sin \theta_3 - c \omega_3^2 \cos \theta_3 - 2b \omega_3 \cos \theta_3,$$

$$D^* = \cos \theta_3, \quad E^* = -b \sin \theta_3 + c \cos \theta_3, \quad F^* = a \varepsilon_1 \cos \theta_1 - a \omega_1^2 \sin \theta_1 + b \omega_3^2 \cos \theta_3 + c \omega_3^2 \sin \theta_3 + 2b \omega_3 \sin \theta_3.$$

Obrót i przesunięcie mechanizmu

Jeżeli mechanizm jest obrócony lub przesunięty względem położenia pokazanego na schemacie, korzystamy ze wzorów wyprowadzonych powyżej. Współrzędne punktów mechanizmu wyznacza się ze wzorów transformacyjnych. Omówimy to na przykładzie czworoboku przegubowego, który jest podparty w taki sposób, że oś łącząca punkty podparcia A i D tworzy z poziomem kąt γ . Wtedy kąty opisujące położenia ogniwa są odmierzone od tej osi do ogniwa i obliczane z wyprowadzonych wzorów. Punkt łącznika C o współrzędnych (x, y)

$$x_C = a \cos \theta_1 + L_1 \cos(\theta_2 + \alpha),$$

$$y_C = a \sin \theta_1 + L_1 \sin(\theta_2 + \alpha),$$

zostaje obrócony o kąt γ względem początku układu współrzędnych. Współrzędne punktu przed obrotem i po obrocie można wyrazić za pomocą współrzędnych biegunowych.

$$x_C = r \cos \theta,$$

$$y_C = r \sin \theta$$

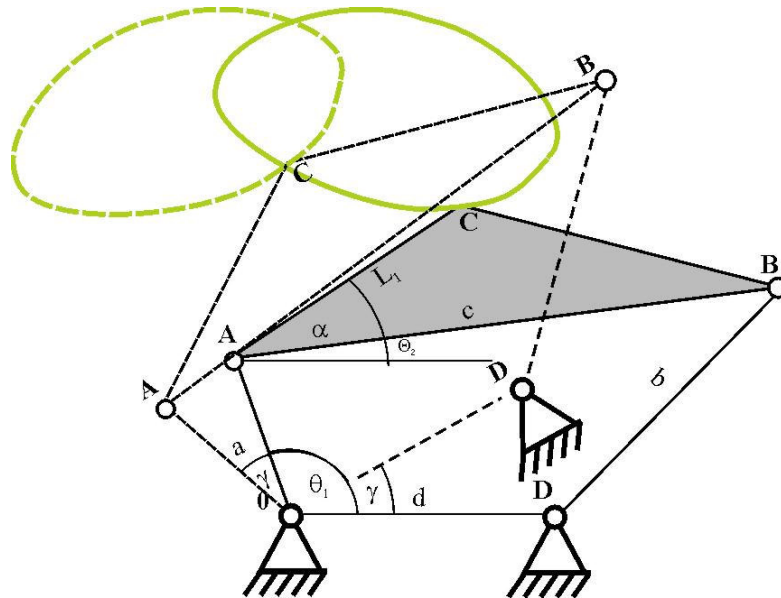
$$x_C' = r \cos(\theta + \gamma) = r \cos \theta \cos \gamma - r \sin \theta \sin \gamma = x_C \cos \gamma - y_C \sin \gamma,$$

$$y_C' = r \sin(\theta + \gamma) = r \sin \theta \cos \gamma + r \cos \theta \sin \gamma = y_C \cos \gamma + x_C \sin \gamma.$$

Gdy węzeł O ma współrzędne (a, b) , mechanizm należy przesunąć o wektor $[a, b]$. Punkt C będzie miał współrzędne:

$$x_C'' = a + x_C',$$

$$y_C'' = b + y_C'.$$



Rysunek 8. Krzywa łącznikowa po obrocie czworoboku o kąt γ .